*ПРФ, ЧРФ, РФ*

**Лекція 1**

Базові функції

      Основними обчислювальними операціями будуть операції *суперпозиції* **S**n+1, *примітивної рекурсії* **R** та *мінімізації* **M**.

*Примітивно рекурсивна функція* (скорочено ПРФ).

*Частково рекурсивна функція* (скорочено ЧРФ).

Всюди визначену ЧРФ називають *рекурсивною функцією*(скорочено РФ).

    ПРФ ⊆ РФ ⊆ ЧРФ.

функція on - примітивно рекурсивна.

**Лекція 2**

*Характеристичною функція*

*Частковою характеристичною функція*

*Примітивно рекурсивна множина*

*Рекурсивна множина*

**Теза Черча**. *Клас алгоритмічно обчислюваних числових функцій співпадає з класом всіх частково рекурсивних функцій.*

Далі алгоритми будемо записувати в мові ПсевдоPascal, яка є спрощеним діалектом мови Pascal. Операторами цієї мови будуть наступні:

<ідентифікатор> = <вираз>,

**while** <вираз> **do** <оператор> | {<оператор>, …, <оператор>}

**for** <вираз> **to** <вираз> <оператор> | {<оператор>, …,

      <оператор>}

**if**  <предикат> **then** <оператор> | {<оператор>, …,

    <оператор>}

**else** <оператор> | {<оператор>, …,

    <оператор>}

Нехай χ(х) – характеристична функція множини натуральних чисел А.

Тоді функція χч (х) = 0 - χ(х) – часткова характеристична функція множини А.

**Теорема.** Нехай f(x) – примітивно рекурсивна функція, A – примітивно рекурсивна множина. Тоді часткова функція fч (х) = f(x), якщо x∈A і невизначена, якщо х∉А є частково рекурсивною.

Визначення ПРФ, РФ та ЧРФ

**Теорема 2.1** (про сумування)

**Теорема 2.2** (про множення)

**Теорема 2.3.** Кускова схема

**Теорема 2.4.** функція *f*(*x*) = *μy*(*g*(*x*, *y*) = 0) примітивно рекурсивна

*Примітивна рекурсивність деяких*

*арифметичних функцій*

**Лекція 3**

rest(x,y) – ПР функція

**Теорема 3.2.** Функція div(*x*,*y*) ПР функція.

**Теорема 3.3.** Функція nd(*x*) ПР функція.

**Теорема 3.4.** Функція χ*p*(*x*) ПР функція.

**Теорема 3.5.** Функція π(*x*) ПР функція.

**Теорема 3.6.** Функція *p*(*n*) = *pn* є ПРФ.

**Теорема 3.7.** Функція *f*(*x*) = [      ] є ПРФ.

*Рекурсія 2-го рівня*

**Теорема 3.6.** Якщо функції *h* та α ПРФ, то функція *f*(*x*) є ПР функцією.

**Приклад** (Послідовність Фібоначчі).

**Лекція 4**

***Нумерації пар і n-ок чисел***

нумерація Кантора

**Теорема 4.1.** Функції **с**(x,y), **l**(n), **r**(n) – ПР функції.

**с**(x,y) = (x+y)(x+y+1)/2 + x = ((x+y)2 +3x +y)/2.

***c***(***l***(*n*), ***r***(*n*)) = *n*, ***l***(***c***(*x*, *y*)) = *x*, ***r***(***c***(*x*, *y*)) = *y*.

**Лекція 5**

*Функція Геделя*

***Г***(*x*, *y*) = *rest*(***l***(*x*), 1 + (*y* + 1)***r***(*x*)).

**Лема.** Для будь-яких взаємно простих чисел *q*, *p* має місце наступне співвідношення:

{*rest*(*pi*, *q*) *| i* = 0, … , *q* – 1} = {0, … , *q* – 1}.

**Наслідок.** Для будь-якого *a* < *q* існує число *n* < *q* таке, що

*rest*(*p*⋅*n*, *q*) = *a.*

**Теорема 4.2** (китайська теорема про остачі). Для будь-яких попарно взаємно простих чисел *p*1, … , *ps*і натуральних чисел *a*1, … , *as*таких, що *ai* < *pi*, *i* = 1, … , *s* існує натуральне число *М* < *p*1⋅…⋅*ps* таке, що *rest* (*M*, *pi*) = *ai* для всіх *i* = 1, … , *s*.

**Теорема 4.3.** Для будь-якої послідовності *a*0, … , *an*натуральних чисел існує число *x*∈*N* таке, що ***Г***(*x*, *i*) = *ai*, *i* = 0, 1, … , *n*.

**Теорема** **4.4** (про моделювання примітивної рекурсії). Якщо функція виникає за схемою примітивної рекурсії із функцій *g*, *h*, то її значення в будь-якій точці може бути обчислене всюди визначеним алгоритмом через значення функцій *g*, *h*, ***Г***.

***Рекурсивні та примітивно***

***рекурсивні множини***

*Властивості Р та ПР множин*

**Теорема 5.1.** Доповнення Р (ПР) множини, а також об’єднання і перетин будь-якої скінченної системи Р (ПР) множин є Р (ПР) множиною.

**Теорема 5.2**. Якщо всюди визначена функція *f*(*x*) рекурсивна (ПР), то множина *А* розв’язків рівняння

*f*(*x*) = 0

рекурсивна (ПР).

**Теорема 5.3.** Якщо ПР функція *f*(*x*) задовольняє умові *f*(*x*) ≥ *x* (*x* = 0, 1, 2, …), зокрема, якщо *f*(*x*) монотонно зростає, то множина *М* всіх значень цієї функції є ПР множиною.

**Лекція 6**

***Рекурсивно перелічимі множини***

**Теорема 6.1.** Кожна ПР множина є рекурсивно перелічимою.

**Теорема 6.2.** Нехай *F*(*a*, *x*) – ПР функція від змінних *a*, *x*. Множина *М* тих значень параметра *а*, для яких рівняння

*F*(*a*, *x*) = 0

має хоча б один розв’язок *x*є РП множиною.

**Теорема 6.2.1.** Нехай *F*(*a*, *x*1, …, *xn*) – ПР функція від змінних *a*, *x*1, … , *xn*. Множина *М* тих значень параметра *а*, для яких рівняння

*F*(*a*, *x*1, … , *xn*) = 0

має хоча б один розв’язок *x*1, … , *xn*є РП множиною.

**Теорема 6.3.** Непуста множина *A* РП множина ⇔ коли вона співпадає з множиною значень деякої ПРФ.

**Теорема 6.4.** Сума та перетин скінченної кількості РПМ є РПМ.

**Теорема** **6.5** (Поста). Якщо множина *А* і її доповнення *А*′ рекурсивно перелічимі, то *А* і *А*′ рекурсивні.

**Теорема 6.6.** Сукупність значень *М* ПР функції *F*(*x*1, …, *xn*) є РП множиною.

**Лекція 7**

***Множини n-ок натуральних  чисел***

**Теорема 7.1.** Якщо функція *f*(*x*1, …, *xn*) рекурсивна (примітивно рекурсивна), то множина *М* розв’язків рівняння

*f*(*x*1, … , *xn*) = 0

є рекурсивною (примітивно рекурсивною) множиною.

**Теорема 7.2.** Для того, щоб непуста сукупність *n*-ок була РП необхідно і достатньо, щоб вона була сукупністю всіх *n*-ок виду

< *f*1(*x*), … , *fn*(*x*)>, *x* = 0, 1, … .

де *f*1(*x*), … , *fn* (*x*) – деякі ПРФ.

**Теорема 7.3.** Якщо графік *Gf*  всюди визначеної функції *f*(*x*1, … , *xn*) є РПМ, то функція *f* рекурсивна.

*Допустимі функції*

Виявляється, що клас ПРФ можна визначити іншим способом. А саме, функції *s*(*x*) = *x* + 1, *q*(*x*) = *x* ∸[    ] будемо називати найпростішими допустимими функціями.

**Теорема 7.5.** Клас ПРФ співпадає з класом ДФ.

**Наслідок** (Торема Робінсон)**.** Клас одномісних допустимих функцій співпадає з класом одномісних ПРФ.

***Частково рекурсивні функції***

**Теорема 8.1** (про графік частково рекурсивної функції). Для того, щоб часткова функція *f* була частково рекурсивною, необхідно і достатньо, щоб графік *f* був рекурсивно перелічимим.

**Наслідок 8.1.** Область визначення кожної ЧРФ є РПМ.

**Наслідок 8.2.** Область значень ЧРФ є РПМ.

**Наслідок 8.3.** Множина *А* *n*-ок чисел РП ⇔ коли часткова характеристична функція множини *А* є ЧРФ.

**Наслідок 8.4.** Якщо *F*(*x*,*y*) – ЧРФ, то сукупність *А* тих *x*, для яких рівняння      *F*(*x*, *y*) = 0 має розв’язок *у* є РПМ.

**Наслідок 8.5.** Сукупність *А* розв’язків рівняння

*f*(*x*1, ... , *xn*) = 0,

де *f*  – ЧРФ, є РПМ.

**Лекція 8**

**Теорема 8.2.** Якщо функції *fi*(*x*) i *gi*(*x*) (*i* = 1, 2, ... , *n*)  ЧРФ, то функція

***Рекурсії* 2*-го рівня***

**Приклад.** Нехай функція *B*(*n*, *x*) визначається схемою

*B*(*n* + 1, *x* + 1) = *B*(*n*, *B*(*n* + 1, *x*)),

*B*(*n* + 1, 0) = sg *n*,

*B*(0, *x*) = 2 + *x*.

Ця функція задається рекурсією 2-го рівня, оскільки значення функції *B*(*n*, *x*) обчислюється через значення цієї ж фунції для менших значень аргументів. Зрозуміло, що така функція обчислюється алгоритмом

function *B*(*n*, *x*)

        begin

                if *n* ≥ 1 ∧ *x* = 0 then *B* = sg *n*

                if *n* = 0 then *B* = 2 + *x*

                if *x* ≥ 1 ∧ *n* ≥ 1 then *B* = *B*(*n* – 1, *B*(*n*, *x* – 1))

         end.

Якщо всі функції, які зустрічаються в цьому алгоритмі є ПРФ, то функція *B*(*n*, *x*) буде по крайній мірі рекурсивною функцією.

**Лекція 9**

***Універсальні функції***

Нехай *ℑ* –система часткових одномісних функцій.

Часткова функція *F*(*x*, *y*) від двох змінних називається універсальною для сімейства *ℑ*, якщо виконуються наступні умови:

1. Для кожного фіксованого *i* функція *F*(*i*, *y*) належить *ℑ*;

2. Для кожної функції *f*(*y*) із *ℑ* існує таке число *i*, що для всіх *y* *F*(*i*, *y*) = *f*(*y*).

**Теорема 9.1.** Система всіх одномісних ПР функцій має універсальну рекурсивну функцію.

Така функція позначається через *D*(*n*, *x*) і має наступні властивості:

1. Для кожного фіксованого *n* одномісна функція *D*(*n*, *x*) є ПР функцією.

2. Для кожної одномісної ПР функції *f*(*x*) існує число *n* таке, що *D*(*n*, *x*) = *f*(*x*).

**Наслідок.** Функція *Dn*+1(*x*0, *x*1, …, *xn*) = *D*(*x*0, ***c***(*x*1, …, *xn*)) є рекурсивною функцією універсальною для класу *n*-місних ПРФ .

**Лекція 10**

***Універсальні ЧРФ***

**Теорема 9.2.** Кожна ЧРФ *f*(*x*1, … , *xn*) може бути обчислена алгоритмом:

                                        function *f* (*x*1, ... , *xn*)

                                                    begin

*i* = 0

                                                   while *F*(*x*1, ... , *xn*, *i*) ≠ 0 do

*i* = *i* +1

*f* = *G*(*i*)

                                                     end

де *F*, *G* деякі (залежні від *f*) ПРФ.

**Теорема 9.3.** Кожна ЧРФ *f*(*x*) може бути обчислена алгоритмом

    function *f*(*x*)

                                       begin

*i* = 0

                                               while *F*(*x*, *i*) ≠ 0 do

*i* = *i* + 1

*f* = ***l***(*i*)

                                       end,

де *F* – деяка (залежна від *f*) ПРФ.

**Теорема 9.4.** Кожна ЧРФ *f*(*x*) може бути обчислена алгоритмом

                               function *f*(*x*)

                                           begin

*i* = 0

                                                  while *D*(*n*, *x*, *i*) ≠ 0 do

*i* = *i* + 1

*f* = ***l***(*i*)

                                           end,

де *n* – деяке (залежне від *f*)  натуральне число (номер ПРФ *F*(*x*, *i*) з теореми 9.3).

***Довизначення функцій***

 Часткова функція *g*(*x*1, ... , *xs*) називається розширенням часткової функції *f*( *x*1, ... , *xs*), якщо в кожній точці, в якій функція *f* визначена, функція *g* також визначена і її значення в цій точці дорівнює значенню функції *f*.

Всюди визначене розширення часткової функції *f* називається довизначенням *f*.

Зрозуміло, що кожна часткова функція має довизначення. Ситуація змінюється, коли шукають не довільні довизначення, а рекурсивні.

**Лекція 11**

**Теорема 10.1.**  Існує одномісна ЧРФ, яка приймає значення 0,1 і не має рекурсивних довизначень

**Теорема 10.2.** Ніяка ЧРФ *U*(*x*,*y*) універсальна для сукупності всіх  одномісних ЧРФ не може мати рекурсивних довизначень.

**Теорема 10.3.** Існують не рекурсивні РПМ.

**Теорема 10.4.** Якщо область визначення *М* ЧРФ *f*(*x*) рекурсивна, то *f*(*x*) має рекурсивне довизначення.

**Теорема 10.5.** Якщо ЧРФ *U*(*x*, *y*) є універсальною для всіх одномісних     ЧРФ, то область визначення *М* цієї функції є нерекурсивною РПМ.

є ЧРФ.